① Notaciones

Recordar

Goal: Estudiar la estructura de $H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \otimes \mathbb{Q}$

1

$\mathcal{O} = \{ f : \mathbb{H}_p \to \mathbb{C}_p \mid f$ función rígida analítica.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$

$\cup$

$\Gamma_0(p) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid p|c \}$

↳ estabilizador en Γ del anillo

$U := \{ z \in \mathbb{C}_p \mid 1 < |z| < p \}$

hom de grupos ⇒

$$\mathcal{O}^\times \to \mathbb{C}_p$$
$$f \mapsto res_U(d\log f)$$

donde · $d\log f = \frac{f'}{f}$

· res_U es el residuo anular p-adico a lo largo de U

obs res_U es $\Gamma_0(p)$-equivariante, trivial en constantes y toma valores en $\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad S_U := res_U \circ d\log : H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Z})$$

· S_U admite una sección Hecke-equivariante

$$ST^\times : H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Z}) \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$$

llamada el levantamiento de Schneider-Teitelbaum multiplicativo.

$ST^{\times}$ ~~[illegible]~~ es una extensión de

$ST^{\times} : MS^{\Gamma_0(p)}(\mathbb{Z}) \to MS^{\Gamma}(\mathcal{O}^{\times}/\mathbb{C}_p^{\times})$ dado por: sea $m \in MS^{\Gamma_0(p)}(\mathbb{Z})$

$$ST(m)\{r,s\}(z) := \oint_{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}_p)} (z-t)\, d\mu_m\{r,s\}(t) := \lim_{\{U_\alpha\}} \prod_\alpha (z-t_\alpha)^{m\{r,s\}(U_\alpha)}.$$

$\mu_m \in MS^{\Gamma}(\Theta)$ ← $\mathbb{Z}$-valued distributions ~~o~~ $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}_p)$

donde · ~~[illegible]~~

· el límite de "productos de Riemann" es tomado sobre cubrimientos $\{U_\alpha\}$ cada vez mas finos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ por bolas abiertas y el punto t_α es un punto muestra en U_α.

· $m\{r,s\}(U_\alpha) := m\{\gamma r, \gamma s\}$ con $\gamma \in \Gamma$, $\gamma U_\alpha = \mathbb{Z}_p$.

<u>Def</u>. Definimos el símbolo de borde $m_\# \in MS^{\Gamma_0(p)}(\mathbb{Z})$ por

$$m_\#\{r,s\} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma_0(p)r = \Gamma_0(p)s \\ 1 & \text{si } r \in \Gamma_0(p)0 \quad s \in \Gamma_0(p)\infty \\ -1 & \text{si } r \in \Gamma_0(p)\infty \quad s \in \Gamma_0(p)0. \end{cases}$$

1. Estructura de $H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times) \otimes \mathbb{Q}$.

Obs $\dim_{\mathbb{Q}} H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Q}) = 2g+1$

$\dim_{\mathbb{Q}} H^1_{par}(\Gamma_0(p), \mathbb{Q}) = 2g$

g genero de $X_0(p)$ (complex dimension of $S_2(\Gamma_0(p))$)

Más generalmente

$$H^1(\Gamma_0(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{1 + \frac{a(n) - 4b(n)}{6} - \frac{c(n)}{2}}$$

- $a(n)$ índice de $\Gamma_0(n)$ en $SL_2(\mathbb{Z})$
- $b(n)$ raíces de $x^2+x+1 \pmod n$
- $c(n)$ raíces de $x^2+1 \pmod n$

Eichler Shimura

$$S_2(\Gamma_0(p)) \oplus \overline{S_2(\Gamma_0(p))} \oplus Eis_2(\Gamma_0(p)) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C})$$

Teorema:

$$0 \to \mathbb{Q} m_\# \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\delta_v \otimes 1} H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \to 0$$

donde $m_\#$ es identificado con la clase de cohomología $\gamma \mapsto m_\# \{r, \gamma r\}$ para algún $r \in \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$.

Recordar (Patricio)

$\Gamma \curvearrowright \Omega$

$$0 \to \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}), \Omega) \xrightarrow{d} MS(\Omega) \to 0$$

$df\{r,s\} = f(s) - f(r)$

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}_1(\mathbb{Q}), \Omega) = \operatorname{ind}_{\Gamma_\infty}^{\Gamma} \Omega$$

$$H^i(\Gamma, \operatorname{Ind}_{\Gamma_\infty}^{\Gamma} \Omega) = H^i(\Gamma_\infty, \Omega)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \Omega^\Gamma \to \Omega^{\Gamma_\infty} \to MS^\Gamma(\Omega) \to H^1(\Gamma, \Omega) \to H^1(\Gamma_\infty, \Omega)$$

$$1 \to \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times \to \operatorname{Ind}_{\Gamma_0(p)}^{\Gamma}(\mathbb{Z}) \to \operatorname{Ind}_{SL_2(\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ind}_{SL_2(\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\mathbb{Z}) \to 1$$

$$1 \to (\mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times)^\Gamma \to \mathbb{Z}^{\Gamma_0(p)} \to \mathbb{Z}^{SL_2(\mathbb{Z})} \oplus \mathbb{Z}^{SL_2(\mathbb{Z})} \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Z})$$

$$\to H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to \dots$$

$$1 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2 \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times) \otimes \mathbb{Q} \to H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Q}) \to 1$$

$$\boxed{0 \to \mathbb{Q} \to MS^{\Gamma_0(p)} \to H^1_{par}(\Gamma_0(p), \mathbb{Q}) \to 0}$$

(2.1) Símbolo theta de borde

(3)

Def Definimos el símbolo theta de borde asociado a $m_{\#}$ como $J_{\#} = ST^{\times}(m_{\#}) \in MS^{\Gamma}(\mathcal{U}^{\times}/\mathbb{C}_p^{\times})$

Fijamos un punto base

dos ~~Dado~~ $\eta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, ~~un punto fijo~~ entonces

$$J_{\#}\{r,s\}(z) = [(z)-(\eta);(r)-(s)]$$

$\frac{c-a}{c-b} \Big/ \frac{d-a}{d-b}$ "

donde $[(a)-(b);(c)-(d)]$ es el radio cruzado de (a,b,c,d)

Valores RM de $J_{\#}$

$F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, $D = B^2 - 4AC$

$\tau_F = \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$ ← estabilizador generado por

$$\gamma_F = \begin{pmatrix} u-Bv & -2Cv \\ 2Av & u+Bv \end{pmatrix} \text{ con } u^2 - Dv^2 = 1.$$

y donde $u+v\sqrt{D}$ es solución fundamental de la ecuación de Pell.

⇒ Para cada $r \in \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$

$$J_{\#}[\tau_F] = J_{\#}\{r, \gamma_\tau r\}(\tau_F) = u \pm v\sqrt{D} \pmod{\mathbb{Z}[1/p]^{\times}}$$

↑ algebraicos, pero pertenecen al cuerpo de multiplicación real y son solo potencias de la unidad fundamental en ese cuerpo.

2.2) Símbolos theta modulares

- $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n \in S_2(\Gamma_0(p))$ una forma nueva cuspidal normalizada con $a_n \in K_f$
- $\omega_f := 2\pi i f(z)dz$ diferencial en $X_0(p)$
  $\hookrightarrow \omega_f^{\pm} := \frac{1}{2}(\omega_f \pm \overline{\omega_f})$
  $\Rightarrow \varphi_f^{\pm}\{r,s\} := (\Omega_f^{\pm})^{-1} \int_r^s \omega_f^{\pm} \in MS^{\Gamma_0(p)}(K_f)$.
  periodos reales e imaginarios de f.

Obs. $\varphi_f^{\pm}, \Omega_f^{\pm}$ están determinados salvo mult por $K_f^{\times}$ y además

$$\Omega_f^+ \Omega_f^- = \Omega_f := \langle f, f\rangle = \langle \omega_f^+, \omega_f^- \rangle \mod (K_f^{\times})$$

[Si $a_n \in \mathbb{Z}$ $\forall n$, entonces $\varphi_f^{\pm}$ ~~toma valores en $\mathcal{O}_{K_f}$~~ $\in MS^{\Gamma_0(p)}(\mathcal{O}_{K_f})$ y va sobreyectivamente a $\mathbb{Z}$.]

Def: El símbolo ~~mod~~ theta modular asociado a f es

$$J_f^{\pm} := ST^{\times}(\varphi_f^{\pm}) \in MS^{\Gamma}(\mathcal{O}/\mathbb{C}_p^{\times}) \otimes \mathcal{O}_{K_f}$$

Valores RM de $J_f^{\pm}$

- f, $a_n \in \mathbb{Q} \rightarrow E_f$ de conductor p
- $\Phi_{Tate}: \mathbb{C}_p^{\times} \longrightarrow E_f(\mathbb{C}_p)$ uniformización p-ádica de Tate de E_f

Conjetura 3.19 Después de reemplazar $J_f^{\pm}$ por potencias convenientes, los puntos locales $\Phi_{Tate}(J_f^{\pm}[\tau]) \in E_f(\mathbb{C}_p)$ están definidos sobre H_τ para todo $\mathbb{H}_p^{RM,0}$ — $\mathbb{H}_p^0 = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}_p^2)' \text{ s.t. } ord_p(z_1 b - z_2 a) = 0 \ \forall (a,b) \in (\mathbb{Z}_p^2)'\}$

región afinoide estándar

2.3 El cociclo de Dedekind-Rademacher

- $$E_2^{(p)}(z) = \frac{p-1}{12} + 2\sum_{n \geq 1} \sigma_1^{(p)}(n)\, e^{2\pi i n z}, \qquad \sigma_1^{(p)}(n) = \sum_{p \nmid d \mid n} d$$

- $\omega_{Eis} := 2\pi i E_2^{(p)}(z)\,dz$ diferencial en $Y_0(p)$

- Dedekind-Rademacher homomorfismo

$$\varphi_{DR} : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Z}, \quad \gamma \mapsto (2\pi i)^{-1} \int_{z_0}^{\gamma z_0} \omega_{Eis} \quad \in H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{Z})$$

Def El cociclo de Dedekind-Rademacher en $H^1(\Gamma, \mathcal{O}^\times / \mathbb{C}_p^\times)$ es

$$J_{DR} = ST^\times(\varphi_{DR})$$

valores RM de J_{DR}

Theorema 3.20 Para todo $\tau \in \mathbb{H}_p^{RM,0}$, el valor $J_{DR}[\tau]$ es una unidad p-ádica en el cuerpo de clases H_τ asociado a τ, y lo genera si el orden asociado a τ no admite una unidad de norma -1.

Dem Sigue de la dem. · conjetura p-ádica de Gross-Stark.
· conjetura "torre de normas".

también deformación p-ádica de formas de Eisenstein Hilbert modulares

3) $\mathcal{O}_{\mathbb{H}}^{\times}$: funciones holomorfas a $\mathbb{H}$ que no se anulan en ninguna parte

3.1 Unidades de Siegel

$_c g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}}^{\times}$ indexadas en $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2 - \{(0,0)\}$ de orden $N > 1$.

depende de un $c \in \mathbb{Z}$, $(c, 6N) = 1$.

Satisfacen:

- $_c g_{v \cdot \gamma} = {}_c g_v | \gamma$ propiedad de transformación.
  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$
  $v \in (\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$

- $\prod_{m\alpha'=\alpha} {}_c g_{\alpha',\beta}(z) = {}_c g_{\alpha,\beta}(z/m)$ relación de distribución.
  $\prod_{m\beta'=\beta} {}_c g_{\alpha,\beta'}(z) = {}_c g_{\alpha,\beta'}(mz)$

dos: $_c g_{\alpha\beta} = g_{\alpha,\beta}^{c^2} \cdot g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$ donde $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}^{\times}(Y(N)) \otimes \mathbb{Q}$ es

dada por $g_{\alpha,\beta}(q) = -q^{w} \prod_{n\geq 0} (1 - q^{n+\alpha} q^{2\pi i \beta}) \prod_{n>0} (1 - q^{n-\alpha} q^{-2\pi i \beta})$

donde $w = \frac{1}{12} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2N}$ con $0 \leq \alpha < 1$.

Cociclo de Dedekind-Rademacher.

3.2 La distribución de Siegel.

$X_0 := (\mathbb{Z}_p^2)'$ vectores primitivos $(a,b)\in\mathbb{Z}_p^2$, es decir, $\gcd(a,b)=1$

$X := \mathbb{Q}_p^2 - \{0,0\} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} p^j X_0$

localmente constantes

$LC(X_0,\mathbb{Z})$: espacio de las funciones en X_0 con valores en $\mathbb{Z}$.

$SL_2(\mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{D}(X_0, A)$: distribuciones en X_0 con valores en $\underset{SL_2(\mathbb{Z})\text{-modulo}}{A}$ (homomorfismos $f: LC(X_0,\mathbb{Z})\to A$)

X_0 compacto $\Rightarrow$ Distribuciones μ son determinadas por sus valores a $U \underset{\text{ab comp}}{\subseteq} X_0$.

Consideremos $\mu_{Siegel} \in \mathbb{D}(X_0, \mathcal{O}_H^\times)$ unidades de Siegel de nivel potencia de p.

$$\mu_{Siegel}((a,b)+p^n(\mathbb{Z}_p^2)) := {}_c g_{a/p^n, b/p^n} \quad \forall (a,b)\in(\mathbb{Z}^2)'$$

· $\underset{+\text{ soporte compacto}}{LC(X,\mathbb{Z})}$, $\underset{+\ p\text{-invariante}}{\mathbb{D}(X,A)}$ $[\mu(p^jU) = \mu(U)]$

Obs $\mathbb{D}(X_0,A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(X,A)$. ($X_0$ es un dominio fundamental para la acción de p en X)

Veremos $\mu_{Siegel} \in \mathbb{D}(X, \mathcal{O}_H^\times)$

Teo 1.1 $\mu_{Siegel}(U\gamma) = \mu_{Siegel}(U)|_\gamma \quad \forall\, U \underset{\substack{ab\\comp}}{\subseteq} X,\ \gamma \in GL_2^+(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ ⑥

⑥

Lema 1.2 $\mu_{Siegel}(X_0) = 1 \pmod{\pm p^{\mathbb{Z}}}$

$$\mu_{Siegel}(p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times) = \left(\frac{\Delta(q^p)}{\Delta(q)}\right)^2 \pmod{\pm p^{\mathbb{Z}}}$$

donde

$$E_2^{(p)}(q) = d\log\left(\frac{\Delta(q^p)}{\Delta(q)}\right) = \left(p-1+24\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ \sum_{p \nmid d | n} d}}{\sigma^{(p)}(n)}\, q^n\right)\frac{dq}{q}.$$

③③ Distribucion de Dedekind-Rademacher.

Lema 1.4 $A \to \mathbb{D}(X,A)$ es un funtor covariante exacto de la categoría de Γ-mod a sí misma.

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{\mathbb{H}} \xrightarrow{e^{2\pi i z}} \mathcal{O}_{\mathbb{H}}^\times \to 1$$

$$\hookrightarrow\ 1 \to \mathbb{D}(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{D}(X,\mathcal{O}_{\mathbb{H}}) \to \mathbb{D}(X,\mathcal{O}_{\mathbb{H}}^\times) \to 1$$ exacta de Γ-modulos

$\mu_{dR} := \delta(\mu_{Siegel}) \in H^1(\Gamma, \mathbb{D}(X,\mathbb{Z}))$ es un cociclo en Γ, es decir $\mu_{DR}(\gamma_1\gamma_2) = \mu_{DR}(\gamma_1) + \mu_{DR}(\gamma_2)|_{\gamma_1^{-1}}$.

μ_{DR} se obtiene definiendo

$\mu_{DR}(\gamma) := \tilde{\mu}_{Siegel}|_{\gamma^{-1}} - \tilde{\mu}_{Siegel}$ donde

$\tilde{\mu}_{Siegel} := \frac{1}{2\pi i}\log(\mu_{Siegel}) \in \mathbb{D}(X, \mathcal{O}_{\mathbb{H}}^{\times})$

<u>Lema 1.5</u>

$$\mu_{DR}(\gamma)(X_0) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\mu_{DR}(\gamma)(p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{\times}) = \varphi_{DR}(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

donde $\varphi_{DR}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{\gamma z_0} 2E_2^{(p)}(z)\,dz \ : \Gamma_0(p) \to \mathbb{Z}.$

(3.4) La transformada de Poisson mult.

$\mathbb{D}_0(X_0, \mathbb{Z})$: $\mathbb{Z}$-mod de distribuciones en X_0 satisfaciendo $\mu(X_0) = 0$.

Def La trans de Poisson mult. de $\mu \in \mathbb{D}_0(X_0, \mathbb{Z})$ es la función rig. analítica en $\mathbb{H}_p$ definida por

$$J(\mu)(\tau) = ⨰_{X_0} (x\tau + y)\,d\mu(x,y)$$

$$:= \lim_{\{U_\alpha\}} \prod_\alpha (x_\alpha \tau + y_\alpha)^{\mu(U_\alpha)}$$

donde $\{U_\alpha\}$ es un cubrimiento por ab del sop de f. y $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha$. (punto muestra)

$J: \mathbb{D}_0(X_0, \mathbb{Z}) \to \mathcal{A}^{\times}$

identificando $\mathbb{D}_0(X_0, \mathbb{Z})$ com

$\mathbb{D}_0(X, \mathbb{Z})$ $[\mu(X_0) = 0 \, , \, \mu(pU) = \mu(U)]$

8

7

$\rightsquigarrow J : \mathbb{D}_0(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{A}^\times / p^{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow J_{DR} := J(\mu_{DR}) \in H^1(\Gamma, \mathbb{A}^\times / p^{\mathbb{Z}})$ que está representado

por $J_{DR} : \Gamma \to \mathbb{A}^\times$

$\gamma \mapsto J(\mu_{DR}(\gamma))$